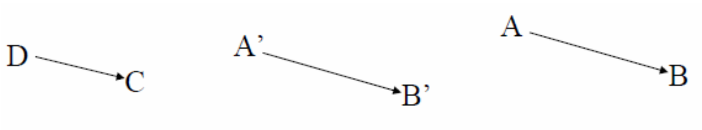
Modellezés és optimalizálás a gyakorlatban

Néhány alapfogalom –

Vektor: (síkban, térben) Az irányított szakaszt vektornak nevezzük. Pontosan specifikáljuk a végpontok sorrendjét, azaz a kezdőpontot és végpontot.

Alternatív definíció – *Egy n dimenziós vektor egy rendezett szám n-s, azaz n db szám együttese adott sorrendben.*



$v = AB$

Egy adott *v* vektor abszolút értékén a *v* vektor hosszát értjük.

Jelölés: |v|

Nullvektor: Azt a v vektort, melynek abszolút értéke 0, azaz kezdő és végpontja azonos, nullvektornak (*zérusvektornak*) nevezzük. *A zérusvektor iránya tetszőleges.*

Jelölés: 0

Egységvektor: Azt a vektort, melynek hossza egységnyi, egységvektornak nevezzük.

Jelölés: e, i,j,k

Egyező állású vektorok: Két vektor egyező állású, ha párhuzamosak vagy azonosak.

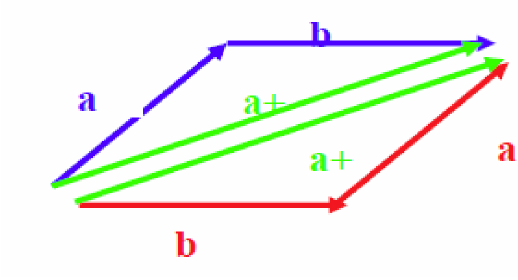
Egyenlő vektorok: Két vektor akkor és csak is akkor egyenlő, ha hosszuk, állásuk és irányuk is megegyezik. *Ekkor* a két adott vektorra létezik olyan eltolás, mely az egyik vektor kezdőpontját és végpontját a másik vektor kezdőpontjába és végpontjába viszi át.

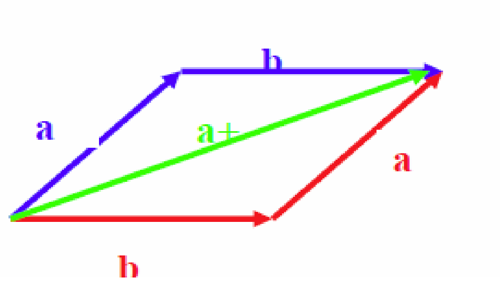
Műveletek vektorokkal –

A **vektorok összeadása** polygon módszer segítségével történik.

Nyílfolyam-módszerként is ismerhetjük, azaz - eltolás, a második vektor kezdőpontját az első végpontjába, és így tovább.

Összeg vektor: az első vektor kezdőpontjából az utolsó vektor végpontjába mutató vektor. (Két vektor esetén paralelogramma módszernek nevezzük.)





Összeadás tulajdonságai:

Az összeadás eredménye is vektor

Kommutativitás: $a+b=b+a$

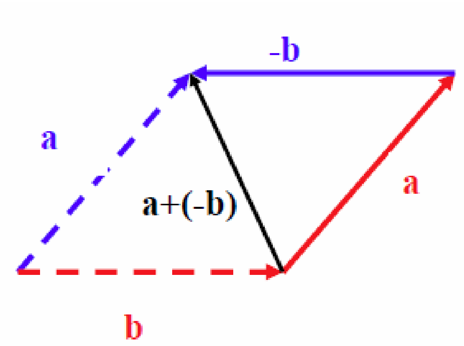
Asszociativitás: $(a+b)+c=a+(b+c)$

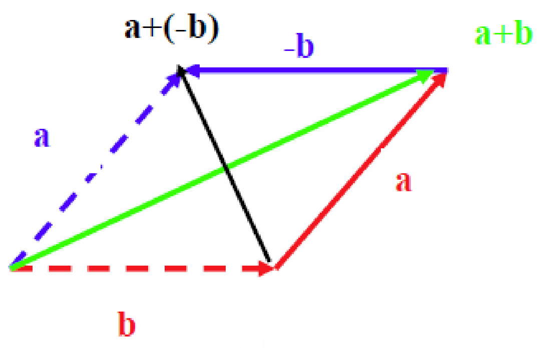
Létezik egységelem: $a+0=a$

Létezik inverz (ellentett) elem: $a+(-a)=0$

Vektorok kivonása: inverz vektor elem hozzáadása

Az a,b vektorok különbségén azt a vektort értjük, melyet hozzáadva *b* vektorhoz összegként az *a* vektort kapjuk. Vektorok kivonása nem kommutatív művelet.





Vektorok szorzása

Számmal való szorzás
Jelölés: αa

Vektort vektorral szorzás eredménye szám, skalárszorzatnak (dot product) nevezzük.

Jelölés: ab

Vektort vektorral-eredménye vektor, vektoriális (vagy kereszt) szorzatnak (cross product) nevezzük.

Jelölés: $a \times b$

Vektor szorzása számmal

Jelölés: αa

Az a vektor α- szorosán, ahol α tetszőleges valós szám, azt a vektort értjük, melynek

abszolút értéke: $|\alpha||a|$

állása megegyezik az a vektor állásával

iránya:

azonos a irányával, ha $\alpha > 0$

ellentettje a irányának, ha $\alpha < 0$

tetszőleges, ha $\alpha = 0$

nyújtás (α>1), zsugorítás(0< α<1), tükrözés (α<0)

Tulajdonságok:

1. αa=aα

2. μ(αa)=(μ α)a

3. (α+μ)a=αa+μa

4. α (a+b)= αa+αb

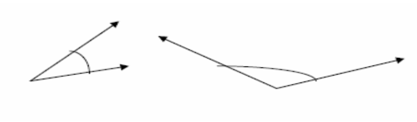
Vektort szorzunk vektorral

Jelölés: a.b

Skaláris szorzat: Legyen adott két azonos dimenziójú (a,b) vektor és az általuk bezárt szög (α). Ekkor az alábbi *számot* az a és b vektorok skaláris szorzatának nevezzük.

$$a.b = |a||b|\cos(\alpha)$$

Ebben az esetben a két vektor hajlásszögén azt a 0≤ α ≤ 180 szöget értjük, melyet a két vektor félegyenese bezár (a belső, azaz mindig a kisebb hajlásszög).



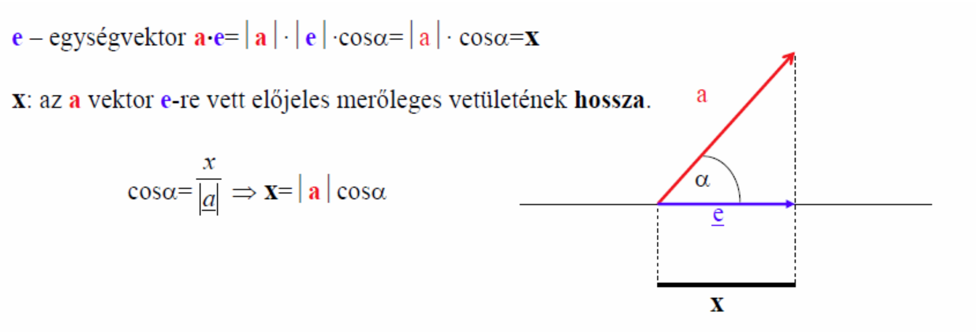
Két vektor skaláris szorzata akkor és csak is akkor nulla, ha a két vektor ortogonális.

Ha a két vektor közül az egyik nullvektor, a hajlásszög tetszőleges, de a skaláris szorzat értéke 0.

Tulajdonságok

1. ab=ba
2. a(b+c)=ab+ac
3. (αa)b=α(ab)=a(α b)
4. nem asszociatív

Geometriai jelentés: egy adott vektor merőleges vetületének a hossza



Vektorok szorzása (vektoriális (keresztszorzat) szorzat): Az $a, b \in R^3$ vektorok keresztszorzatának nevezzük azt a vektort, amelynek hossza

$$|a \times b| = |a||b|\sin(\alpha),$$

ahol α értelemszerűen a két vektor (*a*,*b*) által bezárt hajlásszög.

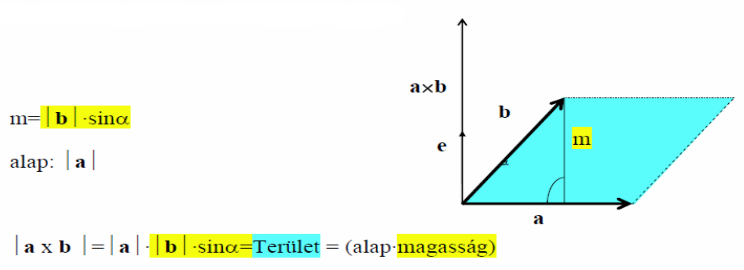
állása: merőleges az a és b vektorok mindegyikére, vagyis a két vektor által kifeszített síkra.

iránya: olyan, hogy az *a*,*b* és *a*×*b* vektorok jobbrendszert alkotnak.

Geometriai jelentés: az alábbi

$$|a \times b| = |a||b|\sin(\alpha)$$

érték pedig nem más, mint a két vektor által kifeszített paralelogramma területe.



Tulajdonságok:

1. Nem kommutatív

2. Disztributív
3. $a \times b = -(b \times a)$
4. $\alpha(a \times b) = (\alpha a) \times b = a \times (\alpha b)$

Két vektor keresztszorzata akkor és csakis akkor zérusvektor, ha a két vektor párhuzamos egymással.

Koordinátarendszer

Ha adottak egy tetszőleges síkban az a és b nem párhuzamos vektorok, ekkor a sík minden más v vektora egyértelműen felbontható az adott vektorokkal párhuzamos összetevőkre.

Ebből következik a bázis. A sík bármely két, nem párhuzamos vektorát a síkbeli vektorok bázisának nevezzük.

Koordináta: a v=αa+βb vektor (α,β) rendezett valós számpárt, mely egyértelműen meghatározza v-t az a,b bázisban a v vektor a,b bázisra vonatkoztatott koordinátának nevezzük.

2D-ben - a rendezett valós számpárokat síkbeli vektoroknak nevezzük.

3D-ben - a rendezett valós számhármasokat térbeli vektoroknak nevezzük.

Síkbeli és térbeli vektorok ábrázolása koordinátarendszerekben történik, azok bázisainak megfelelő definiálásával.

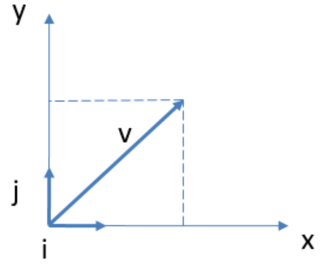
Síkbeli vektorok ábrázolása

Síkban végtelen sok bázist lehet felvenni.

Az egyértelműség kedvéért, alkalmazzunk egy speciális bázist a Descartes koordinátarendszernek megfeleltetve, a következő képpen:

1) i és j egymásra merőleges egységvektorok
2) i és j ennek megfelelően az x és y számegyenesek

   +1 pontjaiba mutatnak.



Térbeli vektorok ábrázolása

A rendezett valós számpárok halmaza, a sík pontjainak halmaza és az origóból kiinduló síkbeli vektorok halmaza között páronként kölcsönösen egyértelmű leképezés valósítható meg.

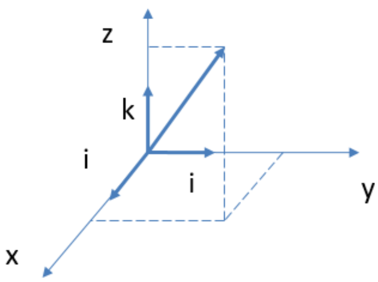
Tehát, ha a,b,c térbeli vektorok nem esnek egy síkba, akkor a tér minden v vektora egyértelműen felbontható az a,b,c vektorokkal párhuzamos összetevőkre, azaz

$$v = \alpha a + \beta b + \gamma c = (\alpha;\beta;\gamma)$$

Bázis - a tér egy pontjából kiinduló, nem egysíkú vektorát térbeli bázisnak nevezzük.

Speciális bázis: i,j,k páronként merőleges egységvektorok jobbsodrású rendszere

$$v = v_1 i + v_2 j + v_3 k = (v_1; v_2; v_3).$$



Műveletek (3D)

Alap műveletek -

$$a + b = (a_1 + b_1)i + (a_2 + b_2)j + (a_3 + b_3)k$$

$$a - b = (a_1 - b_1)i + (a_2 - b_2)j + (a_3 - b_3)k$$

$$\alpha a = (\alpha a_1)i + (\alpha a_2)j + (\alpha a_3)k$$

Koordinátáival adott két vektor skaláris szorzata -

$$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

$$b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$$

$$ab = a_1 b_1 i + a_2 b_2 j + a_3 b_3 k$$

Koordinátáival adott két vektor kereszt szorzata-

$$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

$$b = b_1 i + b_2 j + b_3 k$$

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)i - (a_1 b_3 - a_3 b_1)j + (a_1 b_2 - a_2 b_1)k$$

Két vektor hajlásszöge –

$$\cos\alpha = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}}$$

$$ab = |a||b|\cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{ab}{|a||b|}$$

Bázisvektorok

Ha felveszünk a síkon két darab tetszőleges a és b nem egyállású, O kezdőpontú vektort. Ekkor bármely velük egysíkú v vektor egyértelműen felbontható az adott vektorokkal egyállású összetevőkre.
Tehát :

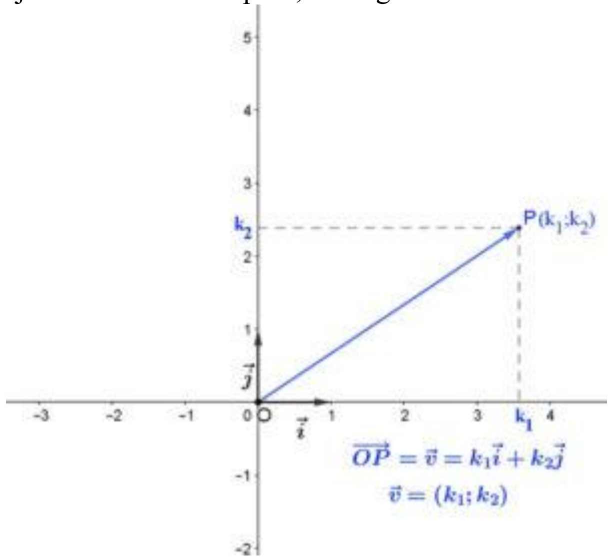
$$\overrightarrow{OP} = \vec{v} \ = k_1 \cdot \vec{a} \ + k_2 \cdot \vec{b}$$

k_1 és k_2 tetszőleges valós számok.

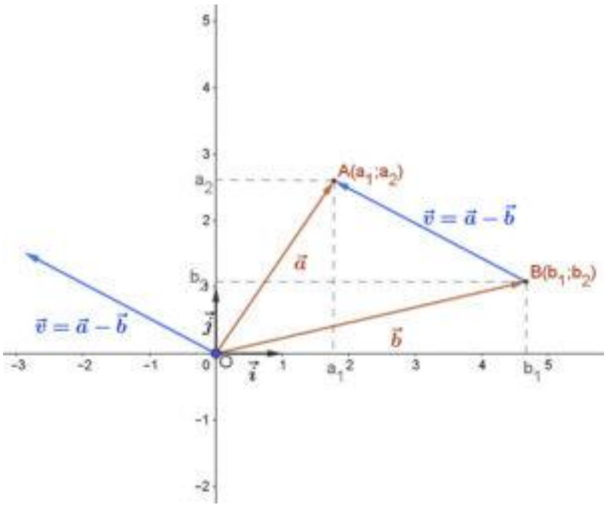
Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorokat bázisvektoroknak, az O pontot vonatkoztatási pontnak szokás nevezni.

Szűkebb értelemben bázisvektoroknak nevezzük azokat az $\vec{\imath}$ és $\vec{\jmath}$ egységnyi hosszúságú, egymásra merőleges vektorokat, ahol az $\vec{\imath}$ vektort +90°-os forgatás viszi át $\vec{\jmath}$ vektorba.

Az $\vec{\imath}$ és $\vec{\jmath}$ közös kezdőpontja a vonatkoztatási pont, az origó.



A közös kezdőpontú $\vec{\imath}$ és $\vec{\jmath}$ bázisvektorok a Descartes féle koordináta rendszert határozzák meg.
A közös kezdőpont, a vonatkoztatási pont, a koordináta-rendszer kezdőpontja.
Ebben a koordináta-rendszerben a (k_1; k_2) számpárt egyaránt mondjuk a P pont illetve az O pontból a P pontba mutató helyvektor koordinátáinak.



A fenti ábrán az origóból az A illetve B pontba mutató $\vec{a}$ illetve $\vec{b}$ vektorok helyvektorok, az A és a B pontok helyvektorai.

A B pontból az A pontba mutató $\vec{v}$ vektor nem helyvektor, szabad vektornak nevezzük. Ez a $\vec{v}$ vektor az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ helyvektorok különbsége

$$\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$$

Minden szabadvektornak megfeleltethető egy helyvektor, amelyik párhuzamos vele, egyenlő hosszú és irányú, de a kezdőpontja az origó.

Az egyes helyvektorok összeg- illetve különbségvektorának a koordinátái a pontok helyvektorainak megfelelő koordinátáinak összege illetve különbsége.

$$\vec{v}(v_1; v_2) => v_1 = a_1 - b_1;\ v_2 = a_2 - b_2\ => \vec{v}\,(a_1 - b_1; a_2 - a_2)$$

Mátrixok

Egy m×n-es mátrixon egy olyan téglalap alakú táblázatot értünk, amelynek m sora és n oszlopa van, elemei pedig adott számhalmazból valók, melyen a mátrix értelmezve van.

Jelölés:

$$A^{m\times n} = A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A= $A_{n,m}$ = (a_{ij})

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Speciális mátrixok

Sorvektor

Oszlopvektor

Nullmátrix - összes eleme 0

Egység mátrix:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonál mátrix:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Négyzetes mátrix: $a_{mn}=a_{nm}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Egy $A_{n\times m}$ mátrix sorainak és oszlopainak felcserélésével a mátrix $A'_{m\times n} = A^*_{m\times n} = A^T_{m\times n}$ transzponáltját kapjuk.

Műveletek mátrixokkal -

Mátrix szorzása skalárral, ekkor a mátrix összes elemét az adott skalárral meg kell szorozni.

Mátrixok összeadásánál azonos dimenzióval kell rendelkezniük a mátrixoknak.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}$$

Mátrixok szorzása esetén A mátrix minden sorvektorának képezzük a skalárszorzatát B mátrix minden oszlopvektorával. Ezért ha A típusa ($n\times m$), akkor B típusa ($m\times k$). Ez azt jelenti, hogy az A és B mátrix csak abban az esetben szorozható össze, ha A-nak ugyanannyi oszlopa van, mint ahány sora B-nek. A szorzatmátrix típusa ennek megfelelően ($n\times k$).

Tulajdonságok -

1. nem kommutatív
2. asszociatív
3. disztributív

A determináns fogalma, kiszámítása és alkalmazása

A determináns a kvadratikus mátrixok halmazán értelmezett f: $A_n \rightarrow |A|$ függvény, mely az A_n mátrixhoz egy valós számot rendel az alábbiak szerint

- n=2

  $$|A| = det\ A = det(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- n>2

  Sor- vagy oszlop szerinti kifejtéssel

  (n-1)x(n-1)–es mátrixok determinánsának kiszámítására vezetjük vissza

  - i. sor szerinti kifejtéssel: $|A|=\Sigma_j a_{ij} A_{ij}$ (i=állandó)
  - j. oszlop szerinti kifejtéssel: $|A|=\Sigma_i a_{ij} A_{ij}$ (j=állandó)

  A_{ij} az (ij)-edik (az i. sor j. eleméhez tartozó) algebrai aldetermináns.

Lineáris egyenlet-rendszer megoldása

Az n egyenletből álló n ismeretlenes $Ax = b$ *lineáris egyenlet-rendszer megoldása*

- ha $|A| \neq 0$

  $$x_i = \frac{d_i}{|A|}, \qquad (i = 1,2, \dots, n)$$

  ahol $d_i = det(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n)$.

- Ha $b = 0$ (homogén lineáris egyenletrendszer) és $|A| \neq 0$, akkor

  $x_i = \frac{0}{|A|} = 0, \qquad (i = 1,2, \dots, n)n$

Cramer-szabály

Tekintsük az alábbi n egyenletből és n darab ismeretlenből álló lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Legyen A az egyenletrendszer együtthatómátrixa, és tegyük fel,

hogy A determinánsa nem 0. Ekkor pedig

$$x_i = \frac{d_i}{|A|},$$

ahol d_i annak az $n \times n$ –es mátrixnak a determinánsa, amit úgy kapunk, hogy az A mátrix i-edik oszlopát kicseréljük $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$-re

Gráfok

Egy gráfot kétféleképp lehet bejárni, méghozzá szélességében és mélységében.

Kiválasztunk egy kezdőpontot, aztán:

- Széllességben folytatjuk
  - Először megvizsgáljuk a pont összes szomszédját
  - Majd azoknak az összes szomszédját
  - és így tovább

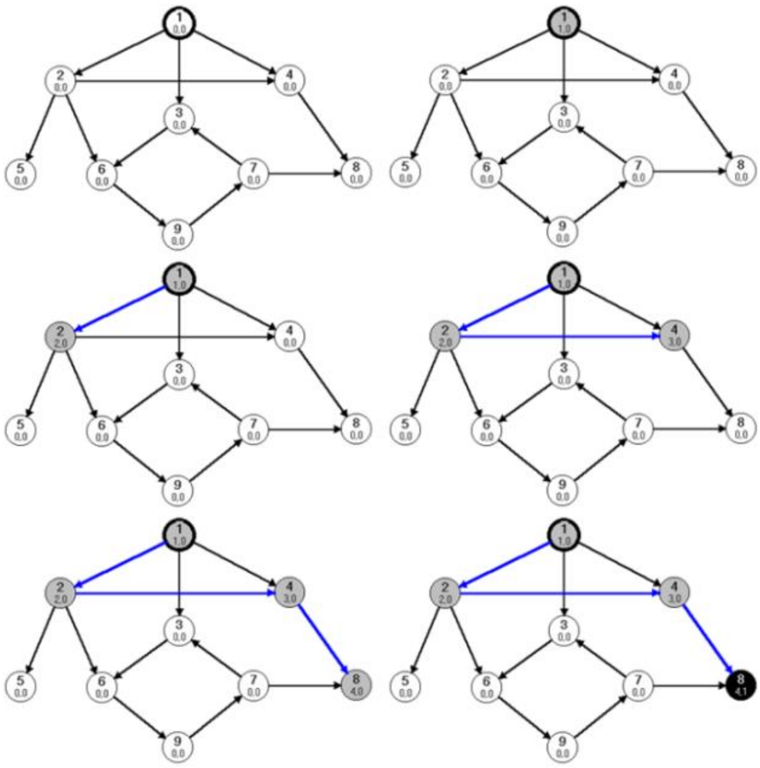
- Mélységben folytatjuk
  - Először megvizsgáljuk a pont **egy** szomszédját
  - Majd annak **egy** szomszédját
  - Ha nem tudunk tovább menni, **visszalépünk**, és a pont egy másik szomszédjával folytatjuk
  - Ha elfogy, megint visszalépünk
  - Ha a kezdőponból is visszalépnénk, végeztünk

A mélységi bejárás szemléltetése

Megkülönböztetjük a *csúcsok státuszát*. Attól függően színezzük a csúcsokat, hogy az illető csúcsot illetően a bejárás milyen fázisban van.

- Egy csúcs legyen *fehér*, ha még nem jutottunk el hozzá a bejárás során (kezdetben minden csúcs fehér).
- Egy csúcs legyen *szürke*, ha a bejárás során már elértük a csúcsot, de még nem állíthatjuk, hogy az illető csúcsból elérhető összes csúcsot meglátogattuk.
- A csúcs legyen *fekete*, ha azt mondhatjuk, hogy az illető csúcsból elérhető összes csúcsot már meglátogattuk és visszamehetünk (vagy már visszamentünk) az idevezető út megelőző csúcsára

A bejárás során tároljuk el, hogy egy csúcsot hányadikként értünk el, azaz hányadikként lett szürke és tároljuk el azt is, hogy hányadikként fejeztük be a csúcs, és a belőle elérhető csúcsok bejárását, azaz a csúcs hányadikként lett fekete. Az említett számokat nevezzük *mélységi*, illetve *befejezési számnak*, amelyek az ábrán a csúcsok címkéi alatt jelennek meg.



Matematikai logika

http://rs1.sze.hu/~hajbat/logika.pdf